VARIÁVEIS DE ESTADO CAPÍTULO 3

**SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO NO DOMÍNIO DO TEMPO**

* 1. [Introdução 3-01](#_TOC_250001)
  2. [Polinômio e função de matriz quadrada 3-01](#_TOC_250000)
  3. Matriz exponencial 3-04
  4. Matriz de transição de estado no domínio do tempo 3-07
  5. Solução analítica da equação de estado 3-10
  6. Exercícios propostos 3-15

# *Introdução*

Prosseguindo no estudo da solução da equação de estado para sistemas lineares, que iniciamos no capítulo anterior trabalhando no domínio da freqüência, vamos agora encaminhar a solução diretamente no domínio do tempo. Examinaremos primeiramente a obtenção da solução analítica e a partir dela discutiremos uma forma de solução numérica, que é a que realmente se usa na maioria das aplicações técnicas.

Como dissemos anteriormente, o tratamento do modelo vetorial de estado no domínio do tempo depende de uma notação apropriada, atribuída a Bellman, e que será nosso ponto de partida neste capítulo.

# *Polinômio e função de matriz quadrada*

* + 1. Polinômio de matriz quadrada

Seja *A* uma matriz quadrada de dimensões Define-se, para *k* inteiro positivo:

*N*  *N* , constituída por elementos reais ou complexos.

*Ak*  *A*  *A*  *A* K *A*

(produto de *k* matrizes iguais a *A*)

e, para *k=0*:

*A*0  *I*

(matriz identidade)

Consideremos agora um polinômio

*p*(**) , de grau n, na variável escalar *λ*:

*p*(**)  *an*

 *n*  *a*

*n*1

 *n*1  *a*

*n*2

 *n*2  K  *a*

 **  *a*0

Então, define-se polinômio da matriz quadrada *A*, associado a

1

*p*(**) , o polinômio que se obtém

substituindo em

*p*(**) , *λ* por *A* e multiplicando-se o termo independente pela matriz identidade I:

*p*( *A*)  *an*

* *An*  *a*

*n*1

* *An*1  *a*

*n*2

* *An*2  K *a*
* *A*  *a*0  *i*

Em particular dizemos que *A* é uma raiz ou um zero de

1

*p*(**) , se

*p*( *A*)  0 .

*Exemplo 1*: Sejam os polinômios:

*p*(**)  **3  2  **2  **  3 e *q*(**)  **2  4  **  3 ,

e *A*  1 2

0

3







Escreva os polinômios associados *p*( *A*) e *q*( *A*) , e determine seus valores numéricos.

*Solução*:

1 23

1 2 2

1 2

1 0

*p*( *A*)  0

3  2  0

3  0

3  3 0 1

1 2 2

1 2 1

  

2 1 8

  

1 2 3

 

1 8 1 2

1 26

0 3

 0

3  0

3  0 9

e 0

3  0

9  0

3  0

27

  

    

       

*p*( *A*)  1

26  2  1

8  1

2  3  1 0

 27

0



0



     

     

*p*( *A*)  1

9

0

3

0

1

26  2

16  1

2  3

0  3

12

 27 

0



0





18 

   

   

15

1 2 2



0

3

0

3

0





1 2

1 0

1 8 4

8  3 0

0 0

*q*( *A*)  0

3  4  0

3  3  0

1  0

9  0

12  0

3  0 0

   

    

    

Note que a matriz *A* é raiz do polinômio *q*( *A*) . Essa é uma propriedade geral muito importante,

garantida por um teorema denominado teorema de Cayley-Hamilton: Toda matriz é raiz de seu próprio polinômio característico.

* + 1. Função de matriz quadrada Seja a representação de uma função

*f* (**) , por meio de uma série de potências:

com raio de convergência *ρ*.



*f* (**)  * k*

*k* 0

 *k*

*Exemplo*:

*f* (**) 

1

1  **

 1  **  **2  **3  **4  K

Note que, neste exemplo, a série de potências só define a função, se

**  1. Caso contrário, a

série torna-se divergente e não representa mais

*f* (**) .

Analogamente à definição de polinômio de matriz quadrada, apresentada acima, define-se função

de matriz quadrada associada a uma função escalar *f* (**) . De fato, dada *f* (**) define-se a

função *f* da matriz quadrada *A*, substituindo-se em

*f* (**) , o escalar *λ* pela matriz *A*:



*f* ( *A*)  * k*

*k* 0

 *Ak*

A definição é valida apenas se os valores dos absolutos dos auto-valores de *A* forem menores que

*ρ*, ou se a matriz tiver a propriedade de ser

*AN*  0 , para *N* inteiro, finito e positivo. De fato,

pode-se provar que, se os auto-valores de *A* forem, em módulo, menores que o raio de

convergência *ρ* de *f* (**) , a série converge (e a definição de *f* ( *A*) só é válida se a série acima for convergente).

No caso do exemplo acima:

*f* (**) 

1

1  **

 1  **  **2  **3  **4  K

vimos que a série só é convergente se

**  1. O raio de convergência é, portanto,

**  1 . A

função da matriz quadrada *A*, associada à função

*f* (**)

acima será:

*f* ( *A*)  (*I*  *A*) 1  *I*  *A*  *A*2  *A*3  *A*4  K

desde que as condições de convergência sejam satisfeitas.

Note que essa última permite o cálculo da inversão da matriz *(I – A)*. Por ex.: seja determinar a matriz inversa de:

*B*  1

 1

*I*  *A*  *B*  1

 1

*I*  *A*  *B*  1

 1  1

 1  0 1

   

0

1

0

1

0

1

0

1

0

0

   

  

  

  

  

notando que

*A*2  0

*B* 1  (*I*  *A*) 1  *I*  *A*  1

0  0

1  1 1

1

0

1

  

0

1

0

  

  

  

Outro exemplo pode ser feito com a matriz *B*:

*B*  1,00

 1,00

*A*  *I*  *B*   0,00

1,00 

0,02



1,30 

 0,02

 0,30

Os auto-valores do *A* são *s*1  0,1 e *s*2  0,2 . Em valor absoluto, são ambos menores que







**  1 . Logo a série é convergente. De fato, levando em conta as seis primeiras parcelas da série, resulta:

exato até a 3ª casa decimal.

# *Matriz exponencial*

*B* 1   0,9848



 0,0151

0,7575

0,7576



A função exponencial *e**t*

é definida pela série de potências:

*f* (**)  *e*

** *t*

 1  **  *t* 

**2  *t* 2

2!

 **3  *t* 3

3!

 **4  *t* 4

4!

 K 

*n*  *t n*

*n*! K



ou seja:

*e * *t*



 

*k* 0

*k*  *t k*

*k*!

Esta série tem a grande vantagem de ser convergente para qualquer valor, real ou complexo, de *λ*

ou de *t*. Isto é, seu raio de convergência é infinito. O mesmo ocorre com a função de matriz

quadrada *A*, associada a *e**t*

, que recebe o nome de matriz exponencial:

*f* ()  *e*

.*t*

     *t* 

 2  *t* 2

2!

 3  *t* 3

3!

  4  *t* 4

4!

 K 

 *nt n*

*n*! K



*e* *t*



 

*k* 0

 *k*  *t k*

*k*!

A série é, portanto, convergente para quaisquer que sejam a matriz quadrada A e os valores de t. Da definição acima resultam, para matriz exponencial, propriedades análogas às da própria função exponencial:

se   0 se *t*  0

*e*0*t*  

*e* 0  

(matriz identidade) (matriz identidade)

Se *A* e *B* forem matrizes quadradas de mesmas dimensões ( *N*  *N* ), e se o produto delas for

comutativo, isto é, se        , então vale a seguinte propriedade:

*e* ( )*t*  *e* *t*  *e**t*

(somente de

       )

Para quaisquer *A* (matriz quadrada), *t* e *τ*, vale a seguinte propriedade:

*e* (*t* ** )  *e* *t*  *e* **

Fazendo-se nessa última igualdade *t*  **

nessa resulta:

*e* 0  *e* *t*  *e* *t*  

Logo, as matrizes *e* *t* e

*e* *t*

são inversas, uma da outra:

*e* *t* 1  *e* *t*

Assim, para inverter a matriz exponencial *e* *t* , basta traçar o sinal de *t* na matriz *e* *t* . Derivada da função exponencial: prova-se facilmente que:

*d e* *t*

*dt*

   *e* *t*

 *e* *t*  

Observação: Propriedade geral das funções de matriz quadrada: O produto de duas funções da mesma matriz quadrada é comutativo. No caso acima vê-se que a propriedade é válida por

simples inspeção, pois  *k*   *k*1       *k*1.

*Exemplo 2*: Dada a matriz

  0 1

0

0







determine a matriz exponencial *e* *t*

correspondente e sua inversa.

*Solução:*

Já vimos que para essa matriz A, tem-se

*A*2  0 . Logo:

*t*

 2  *t* 2

3  *t* 3

1 0

0 1

1 *t*

*e*    .*t* 



2! 3!

 K  0

1  0

0  *t*  0 1

     

A matriz inversa será:

*e* *t* 1  *e* *t*

 1

0



* *t*



1



*Exemplo 3*: Determine a matriz *e* *t*

para o caso em que:

   1

 0



0 

 2



*Solução:*

Sendo *A* uma matriz diagonal, tem-se:

 *n* 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (1) *n* | 0 |  | 1 | 0 |  1 | 0 |  |
|    0 | (2) |  | 0 |  |  0 |  8   | |

 2  

*n*  4

 2

*t*

3  

  *t* 3 

etc.

*t* 1 0  *t* 0  

0   6 0 

*e* 0 1   0



 2*t*   2

    4*t* 3   K

  

  0

2*t* 2  0







3 

*e* *t*

 *t* 2

 1 2



*t*







* + *t* 3

6 K







0



   4*t* 3  

 0

1 2*t* 2*t*

3 K

As séries que aparecem na matriz são facilmente identificáveis:

*e* *t*

*e* *t* 0 

 



 0 *e* 2*t* 

A matriz inversa será simplesmente:

 *et* 0 

*e t*  



 0

*e* 2*t* 

# *Matriz de transição de estado no domínio do tempo*

No capítulo anterior estudamos a matriz de transição de estado no domínio da freqüência:

** (*s*)  *s*    1

A matriz de transição de estado no domínio do tempo será, então:

** (*t*)  £ 1** (*s*) 

Começamos por procurar a derivada da matriz exponencial por dois caminhos diferentes.

*d* (*e* *t* )    *e* *t*

*dt*

Transformada de 1º membro:

£ *d*

 *dt*



(*e* *t* )  *s*  £*e* *t*  





Transformada de 2º membro:

£  *e* *t*   £*e* *t* 

Igualando as duas:

*s*  £*e* *t*     £*e* *t* 

ou:

*s*  £*e* *t*   £*e* *t*  

*s*     £*e* *t*  

£*e* *t*  *s*    1  ** (*s*)

*e* *t*

 £ 1*s*    1 

Portanto:

** (*t*)  *e* *t*

 £ 1** (*s*) 

A matriz de transição de estado no domínio do tempo de um sistema, é, portanto, a matriz exponencial da matriz *A* do referido sistema.

Essa última expressão permite também obter a matriz exponencial *e At* em forma fechada.

*Exemplo 4*: Determine a matriz *e* *t* , em forma fechada, para:

   1

 0



0 

 2



*Solução:*

Usaremos a expressão

*e* *t*

 £ 1*s*    1 

*s*    

*s*  1 0 

 *s*  2



0



 1 0 

*s*    1   *s*  1 

1

 

 0 

  1

 *s*  2 

0   *t*

0



1

*e* *t*  £ 1*s*    1  £****  *s*  1

 ****  *e* 0 

 

  0

  

  

*e* 2*t* 

 

*s*  2  

Propriedades de ** (*t*) : Sendo

** (*t*)  *e* *t*



 *e* *t*  

*k* 0

 *k*  *t k*

*k*!

resultam as seguintes propriedades para ** (*t*) :

(1) ** (0)  

(2)

(3)



** (*t*)    ** (*t*)

** (*t*)  ** (*t*)1

(4)

(5)

(6)



** (*t*)  ** (*t*)  

** (*t*  ** )  ** (*t*)  ** (** )

** (*t*)  ** (** )  ** (** )  ** (*t*) ou *e A**t*  *e A***

 *e A***  *e A**t*

*Exemplo 5*: Verifique se a matriz:



*t* 2  1 0 

(*t*)  

 0

*t*  1

pode ser matriz de transição de estado de um sistema linear.



*Solução:*

Verifica-se facilmente que a propriedade (1) da tabela acima é satisfeita pela matriz dada:

(0)  

mas a propriedade (3) já não é satisfeita:

*t* 2  1

0  *t* 2  1

0  (*t* 2  1) 2 0 

(*t*)  (*t*)   0

  

  

2   

 *t*  1  0

 *t*  1  0

1  *t* 

Logo *M(t)* não pode ser matriz de transição de estado.

*Exemplo 6*: Determine a matriz *A* do sistema cuja matriz de transição de estado é:

** (*t*)   cos *t*

 *sent*



*sent* 

cos *t*



*Solução:*

Pela propriedade (4) da tabela acima, tem-se:



** (*t*)  ** (*t*)  

   *sent*

cos *t*

  cos *t*

 *sent*  0

cos 2 *t*  *sen* 2*t*

 cos *t*



* *sent*

 *sent*

cos *t* 

 cos 2 *t*  *sen* 2*t* 0 

Logo:











   0 1

 1

0







Para confirmar esse resultado, vamos recalcular ** (*t*)  *e* *t* :

1  *s* 1 

** (*s*)  *s*  1  *s*

 1

  *s* 2  1 *s* 2  1

   

1

*s*

 1

*s*

   

 *s* 2  1 *s* 2  1

Anti-transformando essa última matriz por Laplace, resulta:

** (*t*)   cos *t*

 *sent*



*sent* 

cos *t*



o que confere com os dados iniciais do problema.

# *Solução analítica da equação de estado*

Retomemos as equações de estado e de saída:



*x*(*t*)    *x*(*t*)    *u*(*t*)

*y*(*t*)  *C*  *x*(*t*)  *D*  *u*(*t*)

A solução da equação de estado pode ser obtida com auxílio da função auxiliar:

(*t*)  *e* *t*  *x*(*t*)

onde, evidentemente:

Derivando ** (*t*) :

*d * (*t*)  *d*

** (0)    *x*(0)  *x*(0)  *x*0

*e* *t* *x*(*t*)  *e* *t*  *dx*    *e* *t x*(*t*)  *e* *t*  

*x*(*t*)

*dt dt dt*

Substituindo



*x*(*t*) pelo 2º membro da equação de estado

*d * (*t*)  *e* *t*    *x*(*t*)  *e* *t*    *x*(*t*)    *u*(*t*) *dt*

ou

*d * (*t*)  *e* *t*    *u*(*t*)

*dt*

Integrando ambos os membros entre *0* e *t*:

*t d* (*t*)



0 *dt*

*t*

 *e*

0

*t*

 *A***  *x*(** )  *d*  *e* *A***  *B*  *u*(** )  *d*

0

ou

*t*

*e* *t*  *x*(*t*)  *x*0   *e* **  *B*  *u*(** )  *d*

0

Finalmente

*t*

*x*(*t*)  *e* *t*  *x*0  *e* *t*   *e* **  *B*  *u*(** )  *d*

0

A equação de saída pode, então, ser escrita sob a forma:

  *t* 

0 

*y*(*t*)  *C*   *e t*  *x*  *e* *t*  *e* **  *B*  *u*(** )  *d*   *D*  *u*(*t*)

 0 

*Exemplo 7*: Dada a equação de estado de um sistema:

  

0 0

 *x* 

0

 *x*1  

 1 

* *u*(*t*)

  0



1 *x*  1

*x* 2  

  2   

com *u(t)=10* para *t≥0* e

*x*   *x*01    2 

0 *x*   3

 02   

determine *x(t)*.

*Solução:*

Adotaremos a solução no domínio do tempo:

*t*

*x*(*t*)  *e* *t*  *x*0  *e* *t*   *e* **  *B*  *u*(** )  *d*

0

A matriz de transição de estado *e**t*

já calculada no exemplo 2, páginas 5 e 6, é:

*e* *t*

 1 *t*

 

0

1

 

A primeira parcela é a solução de entrada zero:

*x* (*t*)  *e* *t*  *x*

 1

*t*   2   2  3*t*

*L* 0 0 1  3   3 

     

Já a solução de estado zero:

*t*



1 *t*

*t* 1

 ** 

0

*xU* (*t*)  *e*

*t*   *e* **  *B*  *u*(** )  *d*  

   

  

 10  *d*

0 0

1 0 0

1  1

1 *t*

*t*  10  ** 

1 *t*

 5  *t* 2 

5  *t* 2 

*xU* (*t*)  0

1    10

  *d*  0

1   10

*t*    

  0 

   

  10  *t* 

A solução completa resulta:

2  3  *t*  5  *t* 2 

*x*(*t*)  *xL* (*t*)  *xu* (*t*)  





 3  10  *t* 

ou seja:

*x* (*t*)  5  *t* 2  3  *t*  2

1

*x*2 (*t*)  3  10  *t*

*Exemplo 8*: Dadas as equações de estado e de saída de um sistema:

  

 2

1   *x* 

0

 *y*  1 1  *x* 

 *x*1  

 1 

 *u*(*t*) e

1   1

   1



 2

*x* 

1

 *y*  0 1 *x* 

*x* 2  

  2   

 2  

  2 

Determine:

* 1. A equação característica e os pólos do sistema;
  2. As matrizes de transição de estado ** (*S* ) e ** (*t*) ;
  3. A resposta *y*(*t*) do sistema, para *u*(*t*)  0 e *x*0  1

 1;

* 1. Idem para

*x*0  0 e

*u*(*t*)  *h*(*t*) = degrau unitário;

* 1. Idem para

*x*0  1

1 e *u*(*t*)  *h*(*t*) .

*Solução:*

a. Polinômio característico:

  det *s*      det *s*  2  1   *s* 2  4  *s*  3  (*s*  1)  (*s*  3)

  1 *s*  2





Pólos do sistema:

*s*1  1 e

*s*2  3

b.

 *s*  2 1 

** (*s*)  *s*    1     

com

  (*s*  1)  (*s*  3)

 1 *s*  2 







1  0,5 









0,5

→ 0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )

(*s*  1)  (*s*  3)

*s*  2 

(*s*  1)  (*s*  3)

*s*  1

0,5 

*s*  1

*s*  3

0,5

*s*  3

→ 0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )

0,5  (*e* *t*

** (*t*)  0,5  (*e* *t*



 *e* 3*t* )

 *e* 3*t* )

0,5  (*e* *t*

0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )

 *e* 3*t* )



c.

 *x*1   0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )

0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )   1    *e* 3*t* 

*x*  0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )

0,5  (*e* *t*

 *e* 3*t* )  1  *e* 3*t* 

 2  

 *y*1   1 1   *e* 3*t*

    

   0 

 *y*  0 1  *e* 3*t*   *e* 3*t* 

 2       

d.

*t*

*xU* (*t*)  *e* *t*   *e* **  *B*  *u*(** )  *d*

0

Calculemos inicialmente o núcleo da integral

0,5  (*e* **

 *e* 3** )

0,5  (*e* **

 *e* 3** )  0  0,5  (*e* **

 *e* 3** )

0,5  (*e* **

 *e* 3** )

0,5  (*e* **

 *e* 3** )

1

0,5  (*e* **

 *e* 3** )

     

 *x*  0,5  (*e**t*  *e*3*t*)

0

0,5  (*e**t*  *e*3*t* ) *t* 0,5  (*e*  *e*3** )

 1   

   

  *d* 

*x*2 

0,5  (*e**t*  *e*3*t*)

0,5  (*e**t*  *e*3*t* )

0,5  (*e*  *e*3** )

 1 (*e* *t*

1

2



 *e* 3*t* )

1 (*e* *t*

 *e* 3*t* )

 1 *et*

 1 *e*3*t*  1 



  2

2    2 6 3 



1

 (*e* *t*

 2

 *e* 3*t* )

1 (*e* *t*

2



 *e* 3*t* )





 *et*

 2

 1 *e*3*t*  

6 3 

*x* 1  1 *e* *t*

 1 *e* 3*t* 

 1    3 2 6 

 

*x*

2

 2 

 1

 

 3 2

*e* *t*

* 1 *e*

6



3*t* 



*y* 1 1

0

1

2

1  1 *e* *t*  1 *e* 3*t*  

1  *e* *t* 

 1   

   3 2

6    2 1 1 

  

*y*



 2  

 

  

 3

1 *e* *t*

2

* 1 *e*

6



3*t* 



 3

*e* *t*

2

* *e* 3*t*

6 

e. Como o sistema é linear, este caso é a superposição dos casos c. e d.:

*y*  0  1  *e* *t*  1  *e* *t*

1

*y*  *e* 3*t*

 2  1 *e* *t*

 1 *e* 3*t*

 2  1 *e* *t*  7 *e* 3*t*

2 3 2 6

3 2 6

Observação: A solução desse problema foi encaminhada no domínio do tempo com a finalidade de ilustrar o procedimento. A solução no domínio da freqüência, entretanto, é mais rápida. Sugerimos ao leitor que tente esse caminho e compare os resultados.

# *Exercícios propostos*

1. *A* e *M* são duas matrizes quadradas:

2  1

  3  4



1 0

1 



0



 3

   0 1



 3

0





* 1. Determine o polinômio característico *Q(S)* da matriz *A*;
  2. Escreva e calcule o polinômio da matriz *M*, associado a *Q(S)*;
  3. Verifique que a matriz A satisfaz seu próprio polinômio característico, isto é, *Q*()  0 .

*Resposta:*

*Q*(*s*)  *s* 3  5  *s* 2  19

 34  3 

  34



9



1. Determine a matriz exponencial referente às seguintes matrizes:

   0

 2



1 

 3



   0 4



 1

0





*Resposta:*

 

2  *e* *t*  *e* 2*t*

*e* *t*

 *e* 2*t* 

*e t*  



 2  (*e* *t*

 *e* 2*t* )

* *e* *t*

 2  *e* 2*t* 

1. Verifique se as matrizes abaixo indicadas podem ser matrizes de transição de estado. No caso afirmativo determine a matriz A correspondente.

**  

*e* *t*

*e* 2*t* 

**  *t* 2  1 0 

**  *e* *t* 0

1 *e* *t*  1 1 



0

1



0



2  *t*  1

3  

 

*Resposta:*



**1 : não

**2 : não

** 3 : sim;

   1 0



 0

0





1. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema:

    0

1   *x* 

0

 *y*  1  1  *x* 

 *x*1  

 1 

 *u*(*t*)

1   1

   10



 7

*x* 

1

 *y*  0 1  *x* 

*x* 2  

  2   

 2  

  2 

determine a resposta do sistema no caso em que

*x*0  0 e

*u*(*t*)  *h*(*t*) = degrau unitário.

*Resposta:*

4

*y*1  10

1

 1 *e* 2*t* 

6

1 *e* 5*t*

15

*y*2  30

 5 *e* 2*t*

9

 19 *e* 5*t*

45

1. Considere um satélite artificial que gira em torno de seu próprio eixo de simetria. A posição angular do satélite é determinada pela abscissa *e*(*t*) e seu momento de inércia em relação ao eixo de simetria é *J*. Por meio de jatos de gás apropriados, um conjugado de torção *M(t)*, ajustável,

pode ser aplicado ao satélite. O sistema é isento de atrito.

* 1. Escolha como variáveis de estado a posição angular

*e*(*t*)

e a velocidade angular



*e*(*t*) ,

como variável de saída são:

*y*(*t*)  *e*(*t*) . Mostre então que as equações de estado e de saída

  

0 1

 *x* 

 0 

 *x* 

 *x*1  



 1   1   *u*(*t*)

*y*  1

0 1

  0

0 *x*   

*x* 

*x* 2  

  2 

 *J* 

 2 

* 1. Determine a matriz de transição de estado, a resposta impulsiva e a resposta a um degrau unitário do sistema. Faça um esboço dos gráficos dessas respostas.
  2. Considere o problema de levar o satélite do estado inicial *x*0  ** 0 0 ao estado final

*x*  ** 0. Suponha que os jatos de gás produzam dois torques sucessivos, de mesmo

*f*

*f*

valor (M), mas de sentidos contrários, conforme o gráfico. Supondo que o satélite deva girar de 30º em um intervalo de tempo T, determine o valor do torque necessário para efetuar a manobra, bem como o instante T’ em que o torque deve mudar.

M

0

T

t

-M

T’